ИУ9, ЛАиАГ, 2 семестр, 1 модуль, 2013
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

Вопросы, оцениваемые в 2 балла (формулировки без доказательств)

1) Сформулировать определение линейного (векторного) пространства и базиса.
2) Сформулировать определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Как изменяются координаты вектора при переходе от базиса к базису? Сформулировать свойства матриц перехода.
3) Сформулировать определение размерности векторного пространства и изоморфизма векторных пространств. Сформулировать теорему об изоморфизме векторных пространств одинаковой размерности.
4) Сформулировать определение линейного подпространства. Привести примеры.
5) Сформулировать определение суммы векторных подпространств и теорему о формуле Грассмана.
6) Сформулировать определение прямой суммы подпространств. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии для того, чтобы сумма двух подпространств векторного пространства являлась прямой.
7) Сформулировать определение прямой суммы подпространств. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии для того, чтобы сумма k подпространств векторного пространства являлась прямой.
8) Сформулировать определение суммы и прямой суммы векторных подпространств и следствие из формулы Грассмана о том, когда сумма подпространств является прямой.
9) Сформулировать определение линейной функции. Привести примеры.
10) Сформулировать определение сопряженного пространства и сопряженного базиса. Сформулировать теорему о связи между размерностями конечномерного векторного пространства и сопряженного к нему пространства.
11) Пусть даны два базиса E и F линейного пространства. Сформулировать теорему о связи между матрицей перехода от E к F и матрицей перехода от $\tilde{E}$ к $\tilde{F}$, где $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ – сопряженные базисы к E и F соответственно.
12) Сформулировать определение ядра линейной функции. Сформулировать теорему о связи подпространств и ядер линейных функций и о связи подпространств и решениях однородных СЛАУ.

Вариант 0.

ИУ9, ЛАиАГ, 2 семестр, 1 модуль, РК (теория), 2013

1. Сформулировать определение линейного подпространства. Привести примеры. *(2 балла)*

2. Сформулировать определение прямой суммы подпространств. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии для того, чтобы сумма k подпространств векторного пространства являлась прямой. *(2 балла)*

Вариант 0.

ИУ9, ЛАиАГ, 2 семестр, 1 модуль, РК (теория), 2013

1. Сформулировать определение линейной функции. Привести примеры. *(2 балла)*

2. Сформулировать определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Как изменяются координаты вектора при переходе от базиса к базису? Сформулировать свойства матриц перехода. *(2 балла)*

Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

Вариант

1. На линейном пространстве V^3 задано отображение

$$f : x \rightarrowtail (x, a),$$

где a – фиксированный вектор. Проверить, является ли f линейной функцией. Если да, то найти ее координатную запись в базисе $\{i, j, k\}$. (*2 балла*)

2. В некотором базисе заданы векторы $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (-1, 1)$. Проверить, что они образуют базис и найти разложение вектора $x = (1, 1)$ в этом базисе. (*2 балла*)

3. Найти базис и размерность пересечения подпространств U и W, где

$$U = \{(1, 2, 0), (1, -1, -1)\}, W = \{(0, 0, 1), (3, 1, -1)\}.$$

(*2 балла*)

4. * Доказать линейную независимость систем функций $\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\}$.

Вариант

1. Проверить, образуют ли линейное пространство множество всех симметрических матриц порядка n. Если да, то найти размерность этого линейного пространства. (*2 балла*)

2. Найти базис и размерность суммы подпространств U и W, где

$$U = \{(1, 2, 0), (1, -1, -1)\}, W = \{(0, 0, 1), (3, 1, -1)\}.$$

(*2 балла*)

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис

$$\{e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 0),\ e_3 = (1, 0, 0)\}$$

и в этом базисе записаны три линейные функции

$$f^1(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ f^2(x) = x_1 + x_2,\ f^3(x) = x_3.$$

Найти взаимный базис к $\{f^1,\ f^2,\ f^3\}$. (*2 балла*)

4. * В пространстве V^n даны векторы $e_1, ..., e_m$. Доказать, что если $m \geq n+2$, то существуют такие числа $\alpha_1, ..., \alpha_m$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i = 0$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$.